Loziアトラクタ上の定常統計分布について

日大・理工　　島　田　一　平

ローレンツ系の示す不規則な時間変動には，低レイリー数領域での安定なストレインジアトラクタ（以下S.A.と記す）と高レイリー数領域での，パラメータの変化にともなって周期軌道との間を交互に変化する，という意味で不安定なS.A.とが知られており，前者にはそのポアンカレ写像にカスプ状のおりまがりが存在するという特徴がある。ローレンツ系のS.A.のカントル集合としての構造を具視化する目的でHénonらにより導入[1]された2次元写像にはそのようなカスプは存在せず，その後の研究によれば[2]，高レイリー数領域のローレンツ系と同様の不安定さを示している。Hénonらの例は少し変形してやるとカスプをもつものにすることができるので，カスプの存在とS.A.の安定性との関係をみる上で興味深い例である。またそのようにして得られた安定なS.A.については，低レイリー数のローレンツ系での研究[3]と対応して，定常統計分布を調べてみる意義がある。

以上のような観点から

$$(x,\ y) \xmapsto{\ \mathrm{T}\ } (1 - a\,|\,x\,|^{\alpha} + y,\ bx)$$

；$\alpha = 1$ なる写像を調べた。$\alpha = 2$ の場合がHénonらの例で $\alpha = 1$ の例はLoziによって導入された[4]。図1参照。図2はLozi系についてリヤプノフ数をパラメータ a の変化に対してプロットしたものである。Hénon系の場合と異り，周期軌道におちこむことを示すゼロまたは負の値をとることはなく，S.A.が安定に存在していることがわかる。

定常統計分布は，スピン変数 $\sigma(\boldsymbol{X}) = +1\ (x \geq 0), = -1\ (x < 0)$ をもちいて，変数の組 $\{\sigma(\boldsymbol{X})$ $\sigma(\mathrm{T}(\boldsymbol{X})),\ \sigma(\mathrm{T}^2(\boldsymbol{X})),\ \cdots\cdots \sigma(\mathrm{T}^{n-1}(\boldsymbol{X}))\}$ のとる 2^n 個の状態空間上で求めた（図3）。この分布からスピン1個あたりのエントロピーすなわち写像Tのコロルモゴルフエントロピーを計算すると $h = 0.471$ となり，先に求めたリヤプノフ数と一致する。したがってこの系でも，ローレンツ系と同様にルエル－ボウエンの変分原理が成立する。ローレンツ系と異なるのは，確率ゼロの禁止されたスピン状態があらわれることである。そこで十分大きな n について，許される状態数を評価すると，$N(n) \sim e^{\tau \cdot n} < 2^n$; $\tau \doteqdot 0.531$ となった。指数 τ はコルモゴルフエントロピーとは別の面から写像Tの混合性の強さをあらわしているもので，写像のトポロジカルエントロピーと考えられる。したがってLozi系について，

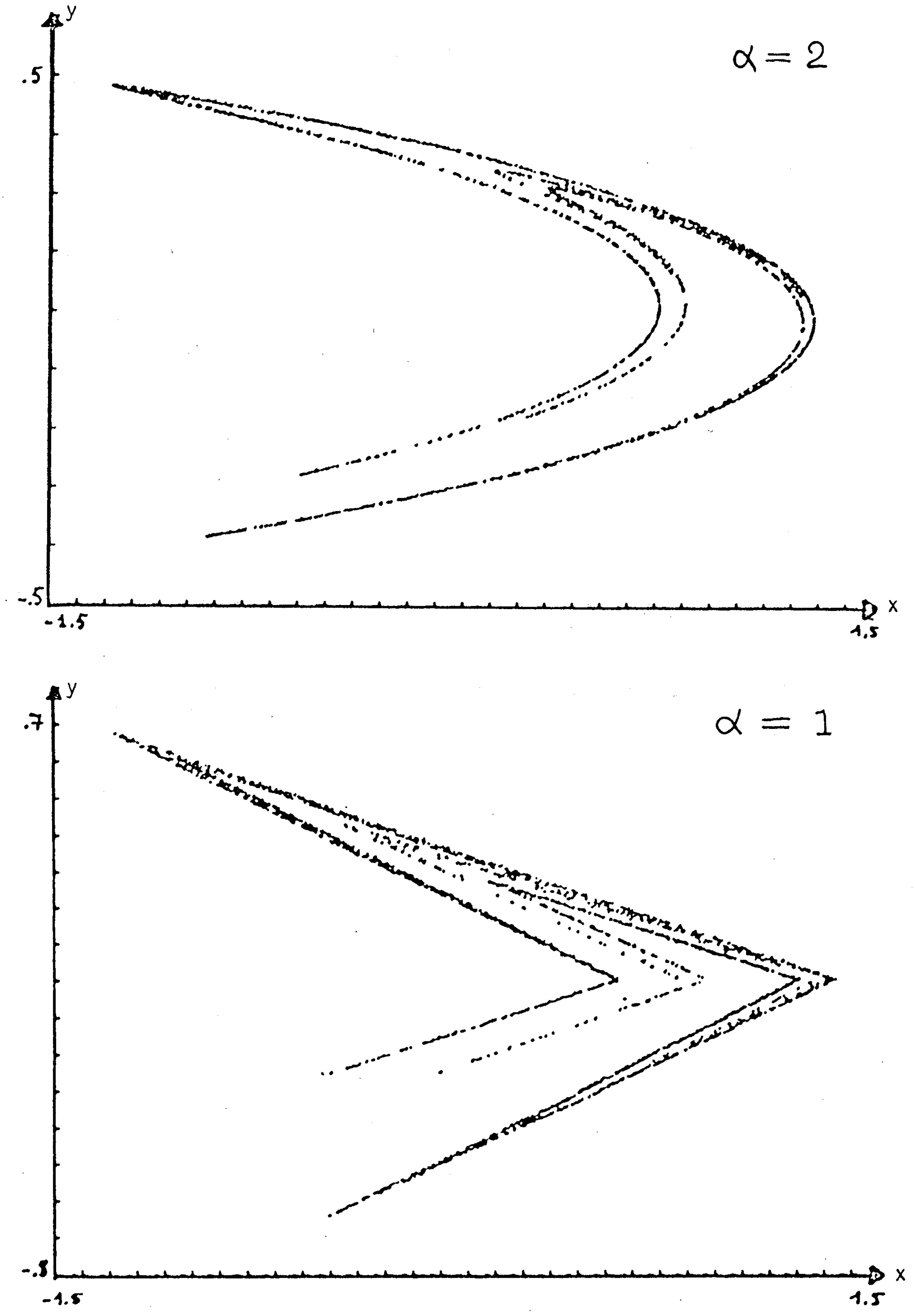

図1

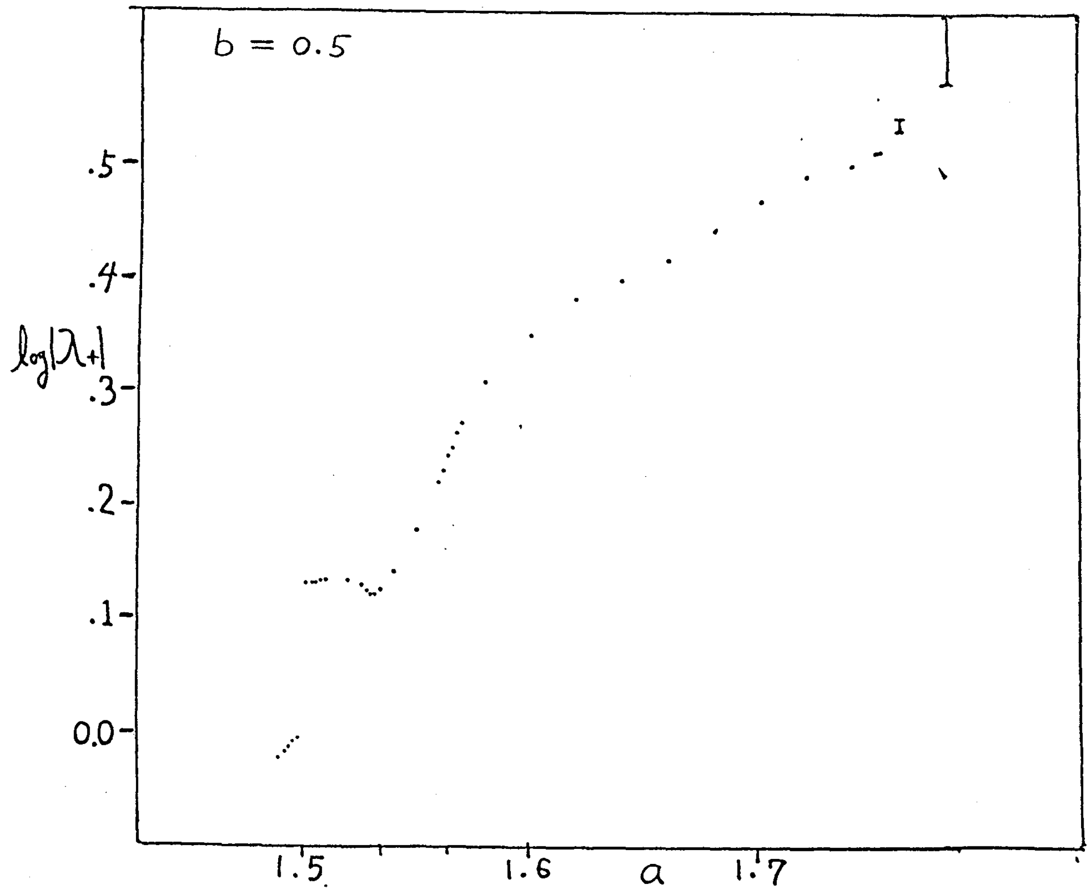

図 2

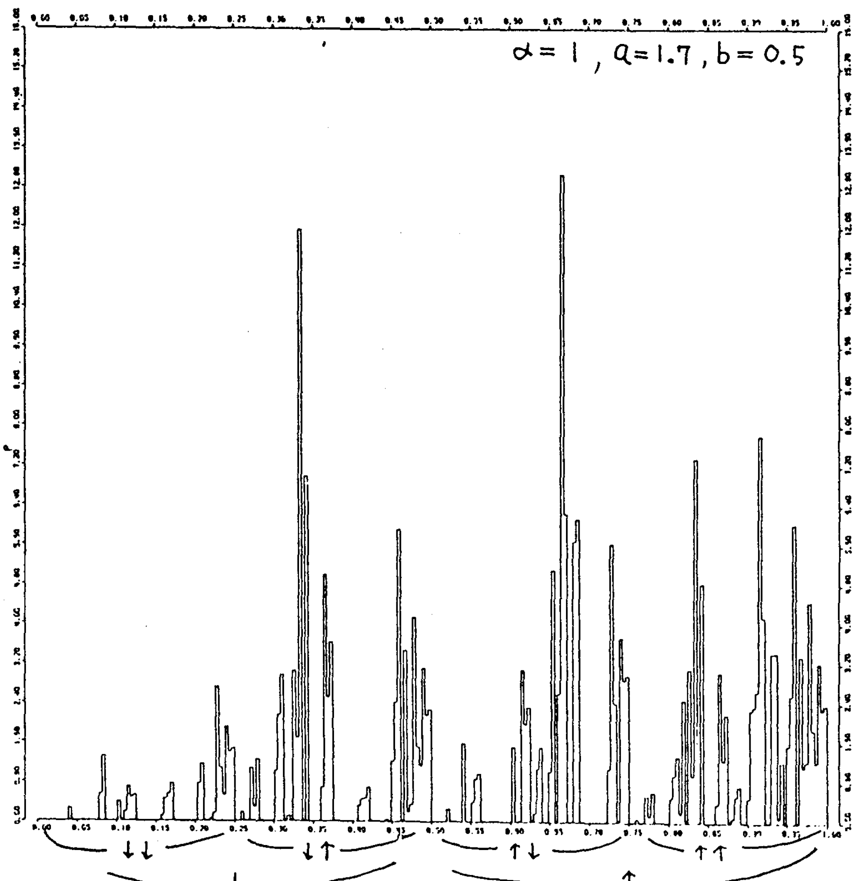

図 3

K-エントロピー＜トポロジカル-エントロピー＜ log 2

なる関係が成立するものと思われる。

最後に，さきの指数 τ とアトラクタのハウスドルフ次元 α_c との関係についてのべる。n 個のスピン変数の組によってもとの座標平面は 2^n 個の部分領域に分割されるが，上にのべた結果より，そのうちの $N(n)$ 個だけでアトラクタをおおうことができる。部分領域の代表的な直径を $R(n)$ とする。もし十分大きな n について，$R(n) \sim R_0 e^{-\beta \cdot n}$ となるならば，アトラクターの全体積は

$$N(n) \cdot (R(n))^{\alpha} \sim e^{\tau \cdot n} \times (e^{-\beta \cdot n})^{\alpha} = e^{(\tau - \beta \cdot \alpha) n}$$

となり，アトラクタの臨界次元 α_c は

$$\alpha_c = \tau / \beta$$

となる。

参 考 文 献

1) M. Hénon & Y. Pomean, *Lectur Notes in Math.*, No. 565 (Springer, 1976).
2) C. Simo, J. Stat. Phys. **21–4** (1979).
3) I. Shimada, Prog. Theor. Phys. **62–1** (1979).
4) R. Lozi, *Intrinsic Stochasticity in Plasmas* (Editions de Physique, Orsay, 1979).

Lorenz系 の 分 岐 構 造

京大・理　　富田和久・津田一郎

§ 1 はじめに

力学系の構造安定相は必ずしも 1 種に限らず，制御パラメーターの値を変えていけば，1 つの相から他の相への分岐現象 (bifurcation phenomena) が見られる。ここでは，特にいわゆるカオスの出現につながっていくような分岐を念頭において考察をすゝめたい。

個々の分岐現象の機構については，従来，諸種の研究がある。例えば単一流域の問題の場合

1) pitchfork 分岐：sub-harmonic cascade